

Л.К. Поліщук, Є. В. Харченко

МОДАЛЬНИЙ АНАЛІЗ СУЦІЛЬНОЇ БАГАТООПОРНОЇ СТРІЛИ ВІДВАЛОУТВОРЮВАЧА

Розглядаються узагальнена математична модель і алгоритм розрахунку частот і форм вільних коливань суцільної багатоопорної стріли відвалоутворювача. Довгомірною несівною конструкцією подана на розрахунковій схемі як балка С. Тимошенка. Алгоритм модального аналізу механічної системи будується на основі матричного методу початкових параметрів. Наводяться результати визначення власних частот і амплітудних функцій прогинів стрілових конструкцій.

Рассматриваются обобщённая математическая модель и алгоритм расчёта частот и форм свободных колебаний сплошной многоопорной стрелы отвалообразователя. Длинномерная несущая конструкция представлена на расчётной схеме как балка С. Тимошенко. Алгоритм модального анализа механической системы строится на основе матричного метода начальных параметров. Приводятся результаты определения собственных частот и амплитудных функций прогибов стреловых конструкций.

У технологічних процесах видобування корисних копалин відкритим способом важливу роль відіграють відвалоутворювачі [4, 8]. Від їх продуктивності і довжини відвальної консолі (стріли) значно залежить ефективність освоєння родовища. Несівна конструкція має вигляд довгомірної багатоопорної складеної балки, що утримується в робочому положенні за допомогою вантової підвіски. Стріла обладнана стрічковим конвеєром для транспортування сипкого вантажу (грунту, видобутої руди тощо).

Під час роботи конвеєра стріла перебуває під дією динамічних навантажень, викликаних вітровим потоком, статичною та динамічною неврівноваженістю обертових елементів, взаємодією завантаженої стрічки, що перебуває у поступальному русі, з опорними роликками. Характер зміни в часі динамічних навантажень, здебільшого, є близьким до періодичного. Тому проведення модального аналізу механічної системи стріли з метою уникнення резонансних явищ під час роботи конвеєра має істотне практичне значення. Обчислення частотного спектра дає можливість запобігти резонансним явищам у механічній системі, а знаходження власних форм сприяє вивченню вимушених коливань утримувальної конструкції.

Дослідженням динаміки довгомірних несівних конструкцій у літературі приділяється значна увага з огляду на широке застосування згаданих елементів у підйимально-транспортній, гірничій, нафтогазовидобувній техніці, будівництві тощо. Вільні та вимушені коливання механічних систем, що містять довгомірні металоконструкції, розглядаються у працях [1, 9, 11, 12]. Розробляються підходи до проведення аналізу взаємодії несівних конструкцій з привідними системами [3, 6, 13], рухомими навантаженнями [2], виконавчими органами машин [4, 7]. З метою спрощення інженерних розрахунків за рахунок дискретизації пружних систем з розподіленими параметрами застосовують методи скінченних елементів [1, 14], скінченних різниць [13], узагальнених переміщень [5] тощо.

Аналіз вільних і вимушених коливань довгомірних конструкцій переважно виконують із застосуванням континуальних або континуально-дискретних розрахунко-

вих моделей механічних систем [4, 8, 12]. Побудові ефективних розрахункових алгоритмів сприяє застосування матричного методу початкових параметрів [1, 10, 11, 13].

В рамках такого підходу у даній статті, розробляється узагальнена марематична модель згинних коливань суцільної підвісної стріли відвалоутворювача, що утримується в робочому положенні за допомогою довільного числа канатів, і розробляється алгоритм розрахунку власних частот і форм механічної системи.

Стрілу розглядаємо як багатоопорну балку (рис. 1), що складається з n ділянок довжинами l_1, l_2, \dots, l_n , в межах яких характеристики поперечних перерізів постійні. На границях ділянок з балкою жорстко зв'язані вантажі із зосередженими масами m_1, m_2, \dots, m_{n+1} та моментами інерції J_1, J_2, \dots, J_{n+1} , що імітують вузли з'єднання металоконструкції стріли з утримувальними канатами. Коефіцієнти жорсткості канатів в напрямі, перпендикулярному до осі стріли, становлять c_1, c_2, \dots, c_{n+1} .

Поперечні коливання ділянок стріли розглядаємо у координатних системах x_i, w_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

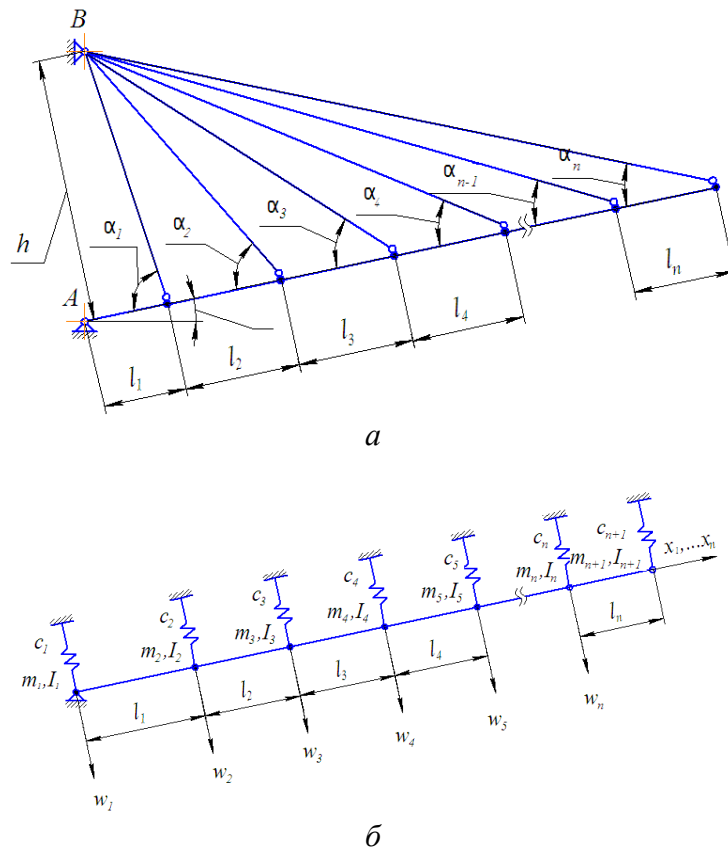


Рис.1. Схема стріли відвалоутворювача (а) та її розрахункова модель (б)

Приймаючи до уваги, що довжини ділянок невеликі, рівняння руху запишемо з урахуванням деформацій зсуву та інерції обертання поперечних перерізів

$$\begin{aligned}
 EI_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_i^2} + \kappa_i GA_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i} - \varphi_i \right) - I_i \rho_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} &= 0; \\
 \rho_i A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - \kappa_i GA_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i} - \varphi_i \right) + P_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

($i = 1, 2, \dots, n$),

де $\varphi_i(x_i, t)$ – кут нахилу дотичної до зігнутої осі стержня від дії згинального моменту; E , G – модулі пружності матеріалу першого та другого роду; ρ_i – інтегральна густина матеріалу; A_i , I_i – площа та екваторіальний момент інерції поперечного перерізу стержня; κ_i – коефіцієнт, що характеризує вплив деформації зсуву; t – час.

Виключаючи із рівнянь (1) невідому функцію $\varphi_i(x_i, t)$, отримуємо

$$EI_i \left(1 - \frac{P_i}{\kappa_i G A_i} \right) \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} - \rho_i I_i \left(1 + \frac{E}{\kappa_i G} - \frac{P_i}{\kappa_i G A_i} \right) \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^2 \partial t^2} + P_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + \rho_i A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \frac{\rho_i^2 I_i}{\kappa_i G} \frac{\partial^4 w_i}{\partial t^4} = 0. \quad (2)$$

Згинальний момент та силу, що виникає у перерізі, перпендикулярному до недеформованої осі стержня, з урахуванням деформацій згину і зсуву записуємо як

$$M_i = -EI_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}; \quad F_i = \kappa_i G A_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i} - \varphi_i \right) - P_i \frac{\partial w_i}{\partial x_i}. \quad (3)$$

Граничні умови на лівому кінці стріли мають вигляд

$$-J_i \frac{\partial^2 \varphi_1(0, t)}{\partial t^2} - M_1(0, t) = 0; \\ m_i \frac{\partial^2 w_1(0, t)}{\partial t^2} + c_1 w_1(0, t) - F_1(0, t) = 0; \quad (4)$$

Граничні умови для стиків сусідніх ділянок запишемо в узагальненій формі

$$M_i(l_i, t) - J_{i+1} \frac{\partial^2 \varphi_i(l_i, t)}{\partial t^2} - M_{i+1}(0, t) = 0; \\ F_i(l_i, t) + m_{i+1} \frac{\partial^2 w_i(l_i, t)}{\partial t^2} + c_{i+1} w_i(l_i, t) - F_{i+1}(0, t) = 0; \\ w_i(l_i, t) = w_{i+1}(0, t); \quad \varphi_i(l_i, t) = \varphi_{i+1}(0, t) \\ (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (5)$$

Аналогічно записуємо граничні умови для правого кінця стріли

$$M_n(l_n, t) - J_{n+1} \frac{\partial^2 \varphi_n(l_n, t)}{\partial t^2} = 0; \\ F_n(l_n, t) + m_n \frac{\partial^2 w_n(l_n, t)}{\partial t^2} + c_{n1} w_n(l_n, t) = 0. \quad (6)$$

Розв'язок рівнянь (1) подаємо у вигляді

$$w_i(x_i, t) = W_i(x_i) \sin \omega t; \quad \varphi_i(x_i, t) = \Phi_i(x_i) \sin \omega t, \quad (7)$$

де $W_i(x_i)$, $\Phi_i(x_i)$ – амплітудні функції прогинів та кутових переміщень перерізів стріли; ω – циклічна частота.

Після підстановки (7) у (3) останні залежності набувають вигляду

$$M_i(x_i, t) = M_i^*(x_i) \sin \omega t; \quad F_i(x_i, t) = F_i^*(x_i) \sin \omega t, \quad (8)$$

де $M_i^*(x_i)$, $F_i^*(x_i)$ – амплітудні функції внутрішніх силових факторів,

$$M_i^*(x_i) = EI_i \Phi_i'(x_i); \quad F_i^*(x_i) = \kappa_i G_i A_i \left[W_i'(x_i) + \Phi_i(x_i) \right] - P_i W_i'(x_i). \quad (9)$$

Підставляючи першу залежність (7) у рівність (2), отримаємо звичайне диференціальне рівняння амплітудних функцій

$$\frac{d^4 W_i}{dx_i^4} + b_i^2 \frac{d^2 W_i}{dx_i^2} - a_i^4 W_i = 0, \quad (10)$$

де

$$a_i^4 = \frac{\kappa_i G A_i}{E I_i (\kappa_i G A_i - P_i)} \left(\omega^2 \rho_i A_i - \frac{\omega^4 \rho_i^2 I_i}{\kappa_i A_i} \right);$$

$$b_i^2 = \frac{\kappa_i G A_i}{E I_i (\kappa_i G A_i - P_i)} \left[P_i + \omega^2 \rho_i I_i \left(\frac{E}{\kappa_i G} + \frac{P_i}{\kappa_i G A_i} - 1 \right) \right].$$

Розв'язок рівняння (10) подаємо згідно методу початкових параметрів у вигляді

$$X_i(x_i) = R_i(x_i) X_i(0), \quad (11)$$

де

$$X_i(x_i) = \text{col}[W_i(x_i), W_i'(x_i), W_i''(x_i), W_i'''(x_i)];$$

$$R_i(x_i) = \begin{pmatrix} Z_{1i}(x_i) & Z_{2i}(x_i) & Z_{3i}(x_i) & Z_{4i}(x_i) \\ Z_{1i}'(x_i) & Z_{2i}'(x_i) & Z_{3i}'(x_i) & Z_{4i}'(x_i) \\ Z_{1i}''(x_i) & Z_{2i}''(x_i) & Z_{3i}''(x_i) & Z_{4i}''(x_i) \\ Z_{1i}'''(x_i) & Z_{2i}'''(x_i) & Z_{3i}'''(x_i) & Z_{4i}'''(x_i) \end{pmatrix}.$$

Тут $Z_{1i}, Z_{2i}, Z_{3i}, Z_{4i}$ — фундаментальна система інтегралів рівняння (10), що мають вигляд

$$Z_{1i} = \frac{1}{\lambda_{1i}^2 + \lambda_{2i}^2} (\lambda_{2i}^2 \cos \lambda_{1i} x_i + \lambda_{1i}^2 \text{ch} \lambda_{2i} x_i); \quad Z_{2i} = \frac{1}{\lambda_{1i}^2 + \lambda_{2i}^2} \left(\frac{\lambda_{2i}^2}{\lambda_{1i}} \sin \lambda_{1i} x_i + \frac{\lambda_{1i}^2}{\lambda_{2i}} \text{sh} \lambda_{2i} x_i \right);$$

$$Z_{3i} = \frac{1}{\lambda_{1i}^2 + \lambda_{2i}^2} (-\cos \lambda_{1i} x_i + \text{ch} \lambda_{2i} x_i); \quad Z_{4i} = \frac{1}{\lambda_{1i}^2 + \lambda_{2i}^2} \left(-\frac{1}{\lambda_{1i}} \sin \lambda_{1i} x_i + \frac{1}{\lambda_{2i}} \text{sh} \lambda_{2i} x_i \right), \quad (12)$$

де

$$\lambda_{1i} = \sqrt{\frac{b_i^2}{2} + \sqrt{\frac{b_i^4}{4} + a_i^4}}; \quad \lambda_{2i} = \sqrt{-\frac{b_i^2}{2} + \sqrt{\frac{b_i^4}{4} + a_i^4}}.$$

Рівністю (11) виражається взаємозв'язок значень амплітудної функції $W_i(x_i)$ та її похідних у початковому та деякому довільному перерізах ділянки стержня. Для встановлення аналогічного взаємозв'язку сукупностей силових та геометричних параметрів перерізів спершу перетворимо (1) з урахуванням (7):

$$E I_i \Phi_i''(x_i) + \kappa_i G A_i [W_i'(x_i) - \Phi_i(x_i)] + I_i \rho_i \omega^2 \Phi_i(x_i) = 0;$$

$$-\rho_i A_i \omega^2 W_i(x_i) - \kappa_i G A_i [W_i''(x_i) - \Phi_i'(x_i)] + P_i W_i''(x_i) = 0. \quad (13)$$

З рівнянь (9), (13) та рівності, що отримується диференціюванням другого співвідношення (13) за просторовою координатою, маємо

$$Y_i(x_i) = B_{1i} X(x_i); \quad X_i(x_i) = B_{2i} Y(x_i), \quad (14)$$

де

$$Y_i(x_i) = \text{col}(W_i(x_i), \Phi_i(x_i), M_i^*(x_i), F_i^*(x_i));$$

$$B_{1i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_i}{a_i \kappa_i G} & 0 & \frac{b_i EI_i}{a_i \kappa_i GA_i} \\ -\frac{EI_i \rho_i \omega^2}{\kappa_i G} & 0 & -\frac{b_i EI_i}{\kappa_i GA_i} & 0 \\ 0 & -P_i - \frac{d_i A_i \rho_i I_i \omega^2}{a_i} & 0 & -\frac{b_i EI_i}{a_i} \end{pmatrix};$$

$$B_{2i} = B_{1i}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa_i GA_i}{b_i} & 0 & \frac{1}{b_i} \\ -\frac{A_i \rho_i \omega^2}{b_i} & 0 & -\frac{\kappa_i GA_i}{b_i EI_i} & 0 \\ 0 & -g_i \frac{\kappa_i GA_i}{b_i} & 0 & q_i \frac{\kappa_i GA_i}{b_i} \end{pmatrix},$$

тут

$$a_i = (\kappa_i GA_i - \rho_i I_i \omega^2); \quad b_i = (\kappa_i GA_i - P_i); \quad c_i = (\kappa_i G)^2 A_i - EI_i \rho_i \omega^2; \quad d_i = (\kappa_i G + E);$$

$$g_i = \left(\frac{a_i P_i}{b_i EI_i} + \frac{d_i A_i \rho_i \omega^2}{b_i E} \right); \quad q_i = \left(\frac{\kappa_i GA_i}{b_i EI_i} + \frac{\rho_i \omega^2}{b_i \kappa_i G} \right).$$

Приймаючи до уваги (11) та (14), отримаємо співвідношення, що дає можливість визначити силові та геометричні параметри довільного перерізу стержня за значеннями цих параметрів на початку ділянки

$$Y_i(x_i) = B_{1i} R_i(x_i) B_{2i} Y_i. \quad (15)$$

Після розділення змінних у граничних умовах (4)–(6) з урахуванням залежностей (7) і (8) записуємо матричні співвідношення

$$Y_1(0) = S_1 Y_0 \quad Y_{i+1}(0) = S_{i+1} Y_i(l_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad Y_{i+1} = S_{n+1} Y_n(l_n) \quad (16)$$

де S_1, S_2, \dots, S_{n+1} – квадратні матриці, що включають елементи, залежні від частоти коливань.

Використовуючи залежності (15), (16), записуємо матричне співвідношення

$$Y_{n+1} = \left(\prod_{i=n}^1 S_n B_{1i} R_i B_{2i} \right) Y_0, \quad (17)$$

на основі якого будуємо алгоритм аналізу вільних коливань механічної системи.

Власні частоти стріли знаходимо, розв'язуючи числовим методом відповідне трансцендентне рівняння. Форми вільних коливань стріли для будь-якої з власних частот визначаємо за допомогою залежності (15), згідно з методом початкових параметрів.

Розглянемо результати розрахунку власних частот і форм чотирьох- і п'ятипрогонової стріл відвалоутворювачів. Параметри стріл, що використовувалися під час проведення розрахунків, наведені у табл. 1 і 2.

У табл. 3 наведені результати розрахунку власних частот механічних систем. Зображені на рис. 3 амплітудні функції коливальних процесів характеризують залежності прогинів і згинальних моментів від поздовжніх координат стрілових конструкцій і дають можливість виявляти небезпечні місця несівних конструкцій.

Проведені розрахунки показують, що резонансні частоти коливань стріли від валуотворювача можуть знаходитися у широкому діапазоні. Тому детальний аналіз динамічних процесів є необхідною умовою раціонального проектування машини.

Розроблена математична модель та узагальнений алгоритм розрахунку частот і форм вільних коливань багато опорної стріли дають можливість підвищити ефективність автоматизованого проектування відвалоутворювачів.

Таблиця 1

Параметри механічної системи чотирьохпрогонової стріли

Параметр	Одиниця виміру	Числове значення	Параметр	Одиниця виміру	Числове значення
n	–	5	$\rho_1 \dots \rho_5$	кг/м ³	$11,2 \cdot 10^3$
c_0	Н/м	$57,6 \cdot 10^5$	I_1	м ⁴	0,148
c_1	Н/м	0	I_2	м ⁴	0,148
c_2	Н/м	$42,84 \cdot 10^5$	I_3	м ⁴	0,148
c_3	Н/м	$10,87 \cdot 10^5$	I_4	м ⁴	0,148
c_4	Н/м	$4,35 \cdot 10^5$	I_5	м ⁴	0,148
c_5	Н/м	0	$\kappa_1 \dots \kappa_5$	–	0,200
A	м ²	$7,66 \cdot 10^{-2}$	$m_1 \dots m_5$	кг	0
l_1	м	37	J_1	кг·м ²	0
l_2	м	21	J_2	кг·м ²	$1 \cdot 10^7$
l_3	м	20	J_3	кг·м ²	$1,941 \cdot 10^6$
l_4	м	7	J_4	кг·м ²	$1,15 \cdot 10^6$
E	Н/м ²	$2,100 \cdot 10^{11}$	J_5	кг·м ²	$0,14 \cdot 10^6$
G	Н/м ²	$8,100 \cdot 10^{10}$			

Таблиця 2

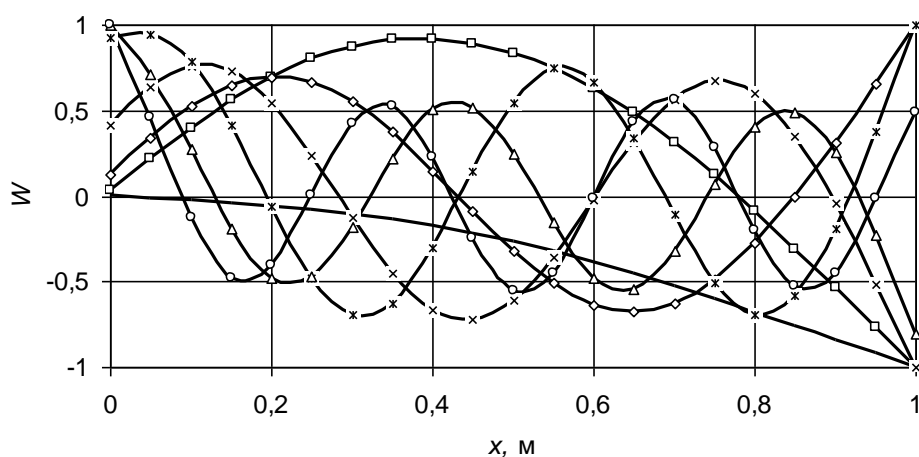
Параметри механічної системи п'ятипрогонової стріли

Параметр	Одиниця виміру	Числове значення	Параметр	Одиниця виміру	Числове значення
n	–	6	$\rho_1 \dots \rho_5$	кг/м ³	$10,8 \cdot 10^3$
c ₀	Н/м	$42,72 \cdot 10^5$	I ₁	м ⁴	0,15
c ₁	Н/м	0	I ₂	м ⁴	0,15
c ₂	Н/м	$25,14 \cdot 10^5$	I ₃	м ⁴	0,15
c ₃	Н/м	$16,19 \cdot 10^5$	I ₄	м ⁴	0,15
c ₄	Н/м	$10,06 \cdot 10^5$	I ₅	м ⁴	0,15
c ₅	Н/м	$6,26 \cdot 10^5$	I ₆	м	0,15
c ₆	Н/м	0	κ ₁ ... κ ₅	–	0,200
A	м ²	$8,79 \cdot 10^{-2}$	m ₁ ... m ₆	кг	0
I ₁	м	28	J ₁	кг·м ²	0
I ₂	м	17	J ₂	кг·м ²	$1,73 \cdot 10^6$
I ₃	м	21	J ₃	кг·м ²	$0,387 \cdot 10^6$
I ₄	м	24	J ₄	кг·м ²	$0,73 \cdot 10^6$
I ₅	м	5	J ₅	кг·м ²	$1,09 \cdot 10^6$
E	Н/м ²	$2,100 \cdot 10^{11}$	J ₆	кг·м ²	$9,85 \cdot 10^3$
G	Н/м ²	$8,100 \cdot 10^{10}$			

Таблиця 3

Власні частоти стрілових конструкцій

Тип стріли	Значення власної частоти, Гц						
	1	2	3	4	5	6	7
Чотирьохпрогонова	1,252	2,710	6,501	2,83	0,09	8,29	37,92
П'ятипрогонова	1,134	2,169	5,084	9,909	15,95	22,69	30,30



— Форма 1 □ Форма 2 ◇ Форма 3 × Форма 4 ×× Форма 5
 ▲ Форма 6 ○ Форма 7

a

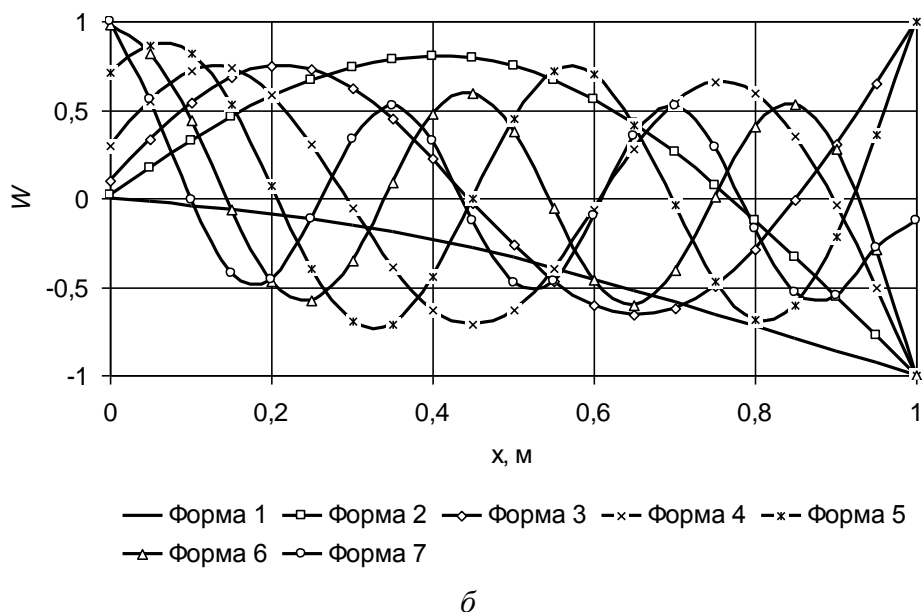


Рис. 2. Амплітудні функції прогинів чотирьохпрогонової (а) і п'ятипрогонової (б) стрілових конструкцій

Побудована математична модель вільних коливань багатопрогонової підвісної стріли дає можливість з достатньою точністю проводити модальний аналіз механічної системи відвальної консолі відвалоутворювача на стадії проектування. Як показали дослідження, власні частоти стріли значною мірою залежать від її згинної податливості, маси транспортованого вантажу та від жорсткості утримувальних канатів і можуть змінюватися, в залежності від технічних характеристик і умов експлуатації відвалоутворювача, в широких діапазонах.

Періодичне збурення коливань системи у зв'язку з взаємодією вантажу з опорними роликками стрічки конвеєра може призводити до появи резонансних явищ. Для їх усунення необхідно раціонально добирати швидкість транспортування вантажів, що свідчить про доцільність оснащення відвалоутворювачів регульованим гідравлічним або електричним приводом.

Література

1. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
2. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 320 с.
3. Волков Д. П., Каминская Д. А. Динамика электромеханических систем экскаваторов. – М.: Машиностроение, 1971. – 384 с.
4. Волков Д. П., Черкасов В. А. Динамика и прочность многоковшовых экскаваторов и отвалообразователей. – М.: Машиностроение, 1969. – 408 с.
5. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. – М: Стройиздат, 1979. – 320 с.
6. Ловейлін В. С., Ярошенко В. Ф., Коробко М. М. Аналіз режимів пуску ланцюгових конвеєрів сільськогосподарських машин // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Вип. 40. – Мелітополь: ТДАА, 2006. – С. 221–230.

7. Мухомад Н. Д., Кондрахин П. М., Шахтарь П. С. и др. Проектирование и конструирование транспортных машин и комплексов / Под ред. И.Г.Штокмана. – 2-е изд. перераб. и доп. – М: Недра, 1986. – 391 с.

8. Панкратов С. А. Динамика машин для открытых горных и земляных работ (основы теории и расчета). – М.: Машиностроение, 1967. 447 с.

9. Поліщук Л. К., Харченко Є. В. Аналіз вільних коливань механічної системи стріли відвалоутворювача у вертикальній площині // Вібрації в техніці та технологіях. 2011. № 3 (63). С. 33–38.

10. Поліщук Л. К. Застосування методу початкових параметрів до аналізу вільних коливань конвеєра // Вісник вінницького політехнічного інституту. – №1. – 1998. – С. 72-77.

11. Пономарёв К. К. Расчёт элементов конструкций с применением электронных цифровых вычислительных машин. – М.: Машиностроение, 1972. – 424 с.

12. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – Москва: Машиностроение, 1985. – 472 с.

13. Харченко Е. В. Динамические процессы буровых установок. – Львов: Світ, 1991. – 176 с.

14. Харченко Є. В., Поліщук Л. К., Собковські С. Розрахунок перехідних процесів у стрічковому конвеєрі з урахуванням рухомості меж транспортувального органу // Технічні вісті. – 2001. – №1(12), 2(13). – С. 102–106.

Автори статті:

Поліщук Леонід Клавдійович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри металорізальних верстатів та обладнання автоматизованого виробництва Вінницького національного технічного університету;

Харченко Євген Валентинович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри опору матеріалів Національного університету “Львівська політехніка”.